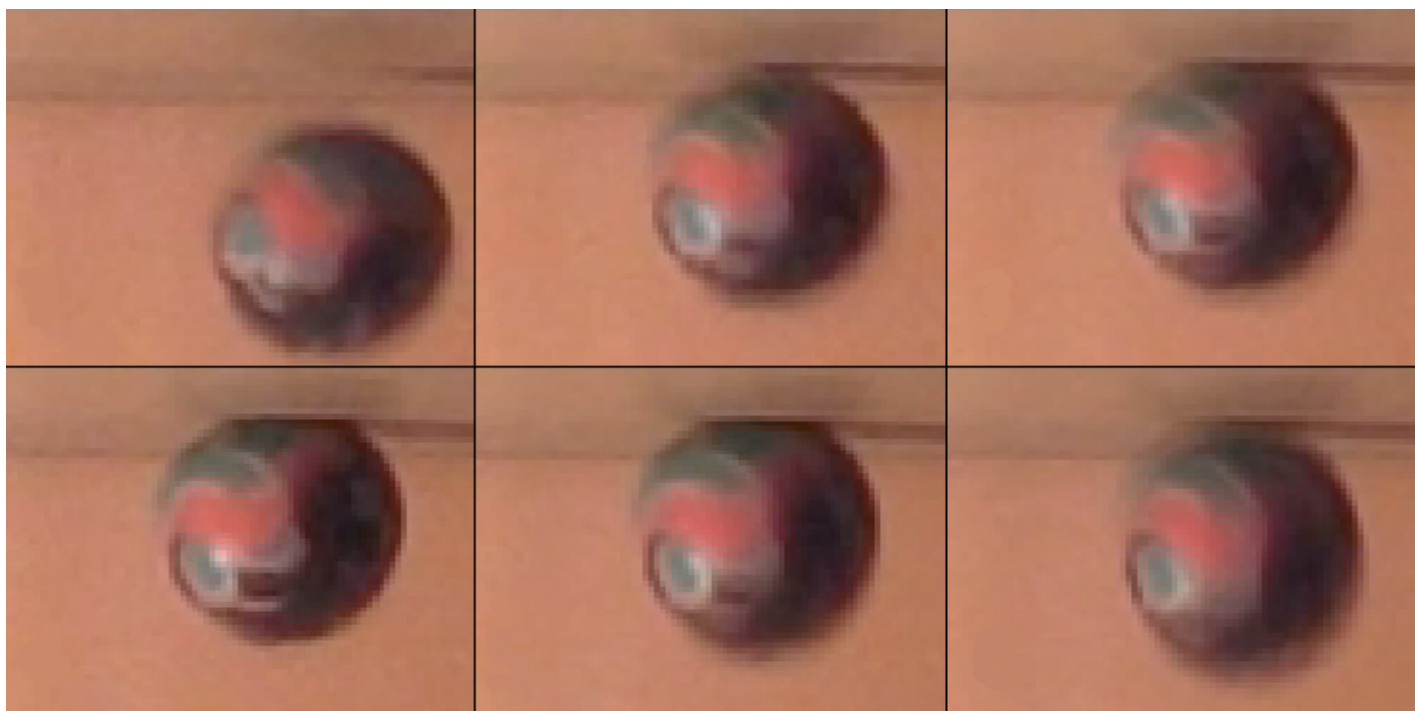


ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИКИ ДВИЖЕНИЯ МЯЧЕЙ



Исследование механики и динамики движения абсолютно жёстких шаров и упругих резиновых мячей с помощью законов Ньютона, сохранения импульса, момента импульса и энергии.

И. Е. Ильин

31 декабря 2016 г.

Содержание

1 ЖЕСТКИЙ ШАР	5
1.1 Описание движения шара	5
1.2 Моделирование движения жесткого шарика	7
1.3 Экспериментальный метод, проверка модели	8
2 КАУЧУКОВЫЙ МЯЧ	10
2.1 Качественное объяснение причины возвращения	10
2.2 Описание движения попрыгунчика	12
2.3 Моделирование движения попрыгунчика	13
2.4 Экспериментальная проверка модели	14
2.5 Условия вылета каучукового мяча	18
3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20
Список используемой литературы	21

ВВЕДЕНИЕ

Многие из нас в детстве играли с попрыгунчиками. Такие каучуковые мячики очень хорошо прыгали и быстро летали по комнате, из-за чего постоянно терялись. Оказывается, у попрыгунчика есть интересное свойство, или, вернее сказать, характерное только для него поведение: если мы бросаем его между двумя горизонтальными пластинами, есть вероятность того, что он вылетит назад, прямо в руку (рис. 1).

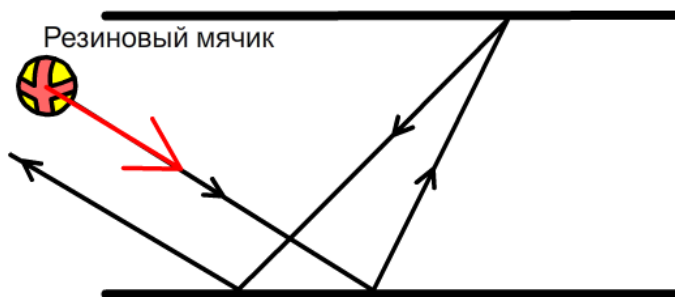


Рис. 1: Если мы бросим резиновый мяч между двумя пластинами, то он вылетит назад.

На рисунке видно, что после первого удара мяч повел себя вполне предсказуемо: угол падения чуть меньше угла отражения, а направление движения по горизонтали осталось тем же. Сложным кажется то, что происходит во время второго удара мячика (о верхнюю пластину). Мы видим, что попрыгунчик изменил направление горизонтальной скорости! Оказывается, при ударе мяч меняет направление и горизонтальной скорости, и угловой, но пока это кажется несколько странным.

Как вы считаете, может ли вылететь назад не каучуковый мяч, а жёсткий шар и проявить такое же поведение (например, пинг-понг шарик)? Ответ достаточно очевиден - нет, не может

(рис. 2). Мы можем заставить вернуться жёсткий шар назад, только если сильно закрутим его в обратную сторону. При этом шар вернётся после первого удара.

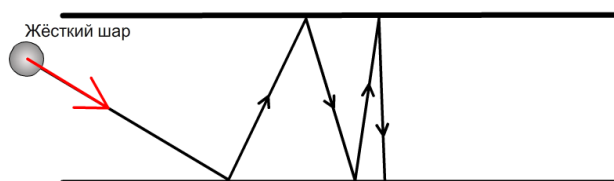


Рис. 2: Жёсткий шар не вылетает назад.

Возникает вопрос: в чем различие между каучуковым мячиком и жестким шаром, и как мы будем описывать их движение? Некоторые могли бы подумать, что отличие резинового мяча от жесткого шарика заключается в разности коэффициентов трения, но данное предположение легко опровергается: можно обтянуть жесткий шар, например пинг-понг, резиной и кинуть его между двумя пластинами (рис. 3).

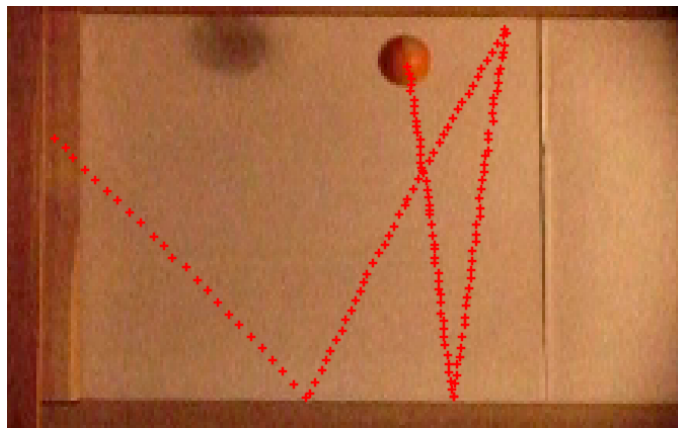


Рис. 3: Обтянутый резиной шарик пинг-понг не вылетает из системы.

Опыт показывает, что шар хоть и немного смещается влево после второго удара, но всё же

не вылетает назад¹. Скорее всего, различное поведение мячиков обусловлено тем, что во время удара они ведут себя по-разному. Это происходит из-за различия в свойствах материалов: модуль Юнга резины намного меньше, чем у металла или пластмассы. Во время удара каучукового мячика наблюдается его значительная деформация (8-15% от размера). При столкновении же жесткого шарика, деформация которого во время удара менее 2% от размера, таких изменений формы не происходит (рис. 4).

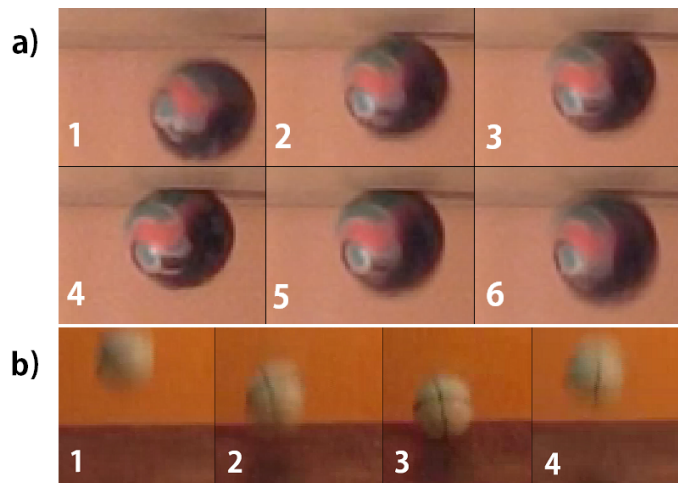


Рис. 4: Раскадровка удара а) каучукового мяча.
b) жесткого шарика пинг-понг.

Видно, что процессы ударов упругого и жёсткого мячей различаются. Далее мы опишем движение твёрдого и упругого тела и сравним их поведение и траектории.

¹Смещение слоя резины относительно шара в точке контакта приводит к появлению силы упругости, разгоняющей шарик в обратную сторону, из-за чего шар, хоть и немного, но отклоняется назад. Как вы можете видеть, этот эффект не особо помогает мячу вернуться обратно.

1 ЖЕСТКИЙ ШАР

1.1 Описание движения шара

Рассмотрим случай, когда абсолютно жесткий шар (нет деформаций во время удара) налетает на жесткую плоскость с горизонтальной и вертикальной скоростями V_x и V_y , угловой скоростью ω , радиусом R и коэффициентом трения между поверхностью шара и плоскостью μ (рис. 5).

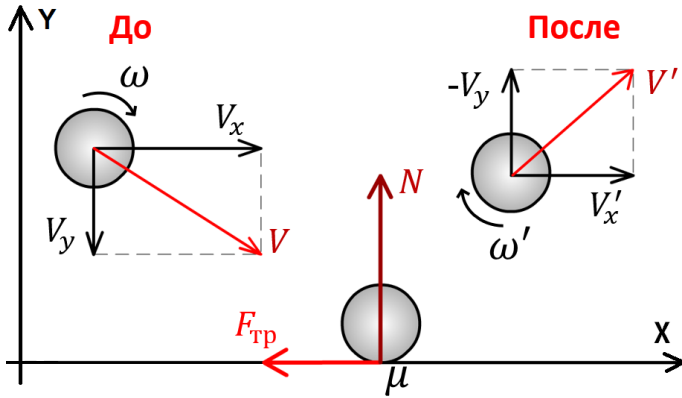


Рис. 5: Соударение абсолютно жесткого шара с поверхностью.

Положительное направление угловой скорости показано на рисунке. Ясно, что, если мы опишем первый удар, то легко сможем описать и второй.

Удар происходит не мгновенно, а длится какое-то конечное время, которое можно оценить следующим образом: после удара по мячу пойдёт волна сжатия. Как известно, скорость распространения упругих волн равна скорости звука в той же среде. Волна сжатия дойдет до верхушки шарика и пойдет в обратную сторону. Когда волна дойдет до точки контакта, удар закончится и шар отскочит. $\tau = 2R/c$. Скорость

звuka в пластике $c = 2000$ м/с. Пусть радиус шарика равен трём сантиметрам, тогда $\tau \sim 3 \cdot 10^{-5}$ сек. Если учитывать то, что площадь контакта шарика с поверхностью меняется во время удара, то должно получиться $\tau \sim 10^{-3}$ сек. Как видно, время удара действительно очень мало, но не равно нулю. В это время (когда есть проскальзывание) на шар действует сила трения. Она может быть направлена влево или вправо, в зависимости от направления скорости нижней точки шара.

При $V_x > \omega R$:

$$\mathbf{F} = -\mu \mathbf{N} \quad (1.1)$$

При $V_x < \omega R$:

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{N}$$

Эта сила изменяет горизонтальную составляющую импульса шара:

$$\Delta P_x = -\mu \int \mathbf{N} dt \quad (1.2)$$

Возможны два варианта:

- 1) Проскальзывание длится все время удара.
- 2) В некоторый момент проскальзывание прекращается, но удар ещё может продолжаться.

Начнём с первого случая.

Сила реакции опоры изменяет вертикальную составляющую импульса:

$$\Delta P_y = \int \mathbf{N} dt \quad (1.3)$$

Отсюда выразим интеграл и подставим его в выражение (1.2):

$$\Delta P_x = -\mu \Delta P_y \quad (1.4)$$

Некоторое количество энергии, естественно, теряется при вертикальных деформациях мяча во время удара, и в выражении для вертикальной

скорости после удара должен появиться некоторый безразмерный коэффициент восстановления, который зависел бы от свойств материала шарика:

$$V'_y = -\gamma V_y$$

Путем не сложных преобразований, в итоге, получаем горизонтальную и вертикальную скорости после удара:

$$V'_x = V_x - \mu V_y(1 + \gamma) \quad (V_x > \omega R) \quad (1.5)$$

$$V'_x = V_x + \mu V_y(1 + \gamma) \quad (V_x < \omega R)$$

$$V'_y = -\gamma V_y$$

Помимо того, что сила трения изменяет горизонтальную скорость, она ещё меняет угловую:

$$\int I d\omega = \mu R \int \mathbf{N} dt \quad (1.6)$$

Здесь I - момент инерции шара, который удобнее записывать как $I = \alpha m R^2$. Пользуясь этой заменой, уравнением (1.3) и (1.6) находим угловую скорость после удара:

$$\omega' = \omega + \frac{\mu V_y(1 + \gamma)}{R\alpha} \quad (V_x > \omega R) \quad (1.7)$$

$$\omega' = \omega - \frac{\mu V_y(1 + \gamma)}{R\alpha} \quad (V_x < \omega R)$$

Для полного шара $\alpha = 2/5$, для мяча пинг-понг $\alpha = 2/3$, для обруча $\alpha = 1$.

Мы рассмотрели случай, когда проскальзывание длится все время удара, но как было сказано ранее, возможна такая ситуация, когда проскальзывание прекратилось, но удар ещё продолжается. Рассмотрим и этот случай.

Если проскальзывание прекратилось, то скорость нижней точки шара равна нулю. В скалярном виде получаем условие движения без проскальзывания: $V'_x - \omega' R = 0$. Используя это условие и уравнения (1.2) и (1.6), получаем угловую и поступательную скорость после удара:

$$V'_x = \frac{\alpha \omega R + V_x}{1 + \alpha} \quad (1.8)$$

$$V'_y = -\gamma V_y$$

$$\omega' = \frac{\alpha \omega R + V_x}{R(1 + \alpha)}$$

Легко убедиться, что такое решение будет верным и при $V_x > \omega R$, и при $V_x < \omega R$ (В первом случае сила трения создаёт положительный момент и в уравнение (1.6) войдёт со знаком плюс, но эта сила будет уменьшать импульс тела (1.2), а значит изменение импульса войдет в уравнение со знаком минус. В итоге в правой части получим знак минус. Во втором случае сила трения создаёт уже отрицательный момент, но увеличивает импульс, т.е. знак тоже отрицательный.)

Из этого решения мы видим, что при $V_x = \omega R$ угловая и горизонтальная скорости не изменяются, что и следовало ожидать.

Теперь объединим (1.5), (1.7) и (1.8), рассмотрим граничное условие на μ , при котором будет выполняться и первое, и второе решение.

$$\mu = \frac{\alpha(V_x - \omega R)}{V_y(1 + \gamma)(1 + \alpha)} \quad (V_x > \omega R) \quad (1.9)$$

$$\mu = \frac{\alpha(\omega R - V_x)}{V_y(1 + \gamma)(1 + \alpha)} \quad (V_x < \omega R)$$

Очевидно, что при меньшем значении μ будет выполняться первое решение, а при большем - второе.

В конечном итоге получаем решение:

При $V_x > \omega R$:

Если $\mu \leq \frac{\alpha(V_x - \omega R)}{V_y(1+\gamma)(1+\alpha)}$

$$V'_x = V_x - \mu V_y(1 + \gamma)$$

$$\omega' = \omega + \frac{\mu V_y(1 + \gamma)}{R\alpha}$$

Если $\mu \geq \frac{\alpha(V_x - \omega R)}{V_y(1+\gamma)(1+\alpha)}$

$$V'_x = \frac{\alpha\omega R + V_x}{1 + \alpha}$$

$$\omega' = \frac{\alpha\omega R + V_x}{R(1 + \alpha)}$$

При $V_x < \omega R$:

Если $\mu \leq \frac{\alpha(\omega R - V_x)}{V_y(1+\gamma)(1+\alpha)}$

$$V'_x = V_x + \mu V_y(1 + \gamma)$$

$$\omega' = \omega - \frac{\mu V_y(1 + \gamma)}{R\alpha}$$

Если $\mu \geq \frac{\alpha(\omega R - V_x)}{V_y(1+\gamma)(1+\alpha)}$

$$V'_x = \frac{\alpha\omega R + V_x}{1 + \alpha}$$

$$\omega' = \frac{\alpha\omega R + V_x}{R(1 + \alpha)}$$

$$V'_y = -\gamma V_y$$

Угол отскока легко найти зная горизонтальную и вертикальную скорость после удара:

$$\tan \phi = \frac{V'_x}{V'_y} \quad (1.10)$$

Где ϕ - угол между вектором скорости после удара и вертикалью.

Как видно, ответ получился достаточно громоздким: много условий на μ и начальные скорости. Но это только из-за того, что помимо двух случаев проскальзывания возможны два направления силы трения, каждое из которых мы учли при решении.

1.2 Моделирование движения жесткого шарика

Имея угловую и поступательную скорость до удара, можно предсказать что будет после. Для визуализации поведения шарика и проверки нашей теории мы написали программу, работающую по очень простому алгоритму (рис. 6).

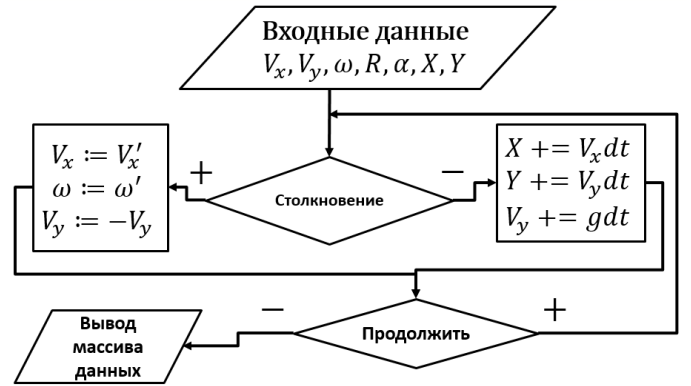


Рис. 6: Алгоритм работы программы в блок схемах.

В начале работы алгоритма на вход подаются начальные значения скорости, коэффициента трения и другие необходимые параметры. Программа начинает работу и когда фиксируется соударение с одной из пластин, она проходит по нескольким условным блокам, выбирая верное решение, и изменяет старые значения ско-

ростей на новые, вычисленные по формулам. Во все оставшееся время полёта шарика, когда удар не происходит, описание движения сводится к движению в поле тяжести.

Одну из возможных траекторий вы можете видеть на рис. 7.

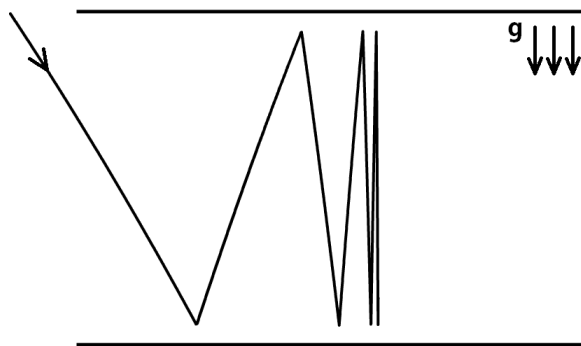


Рис. 7: Траектория движения жёсткого шарика, полученная компьютерным моделированием при $V_x = 2$ м/с, $V_y = 3$ м/с и $\mu = 0.2$

Если ввести коэффициент восстановления $\gamma = 0.9$, то траектория шарика не сильно изменится (рис. 8).

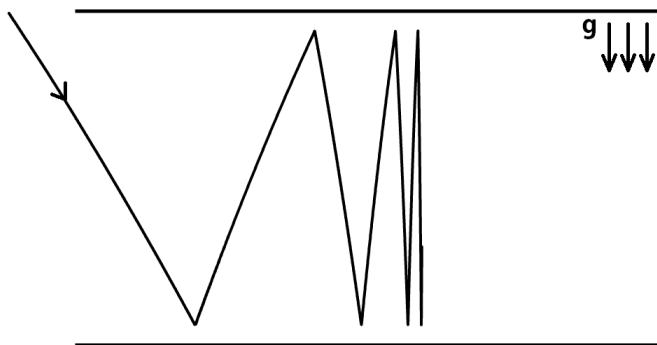


Рис. 8: Траектория движения жесткого шарика при $\gamma = 0.9$

Существенные потери будут видны уже при $\gamma = 0.7$ (рис. 9).

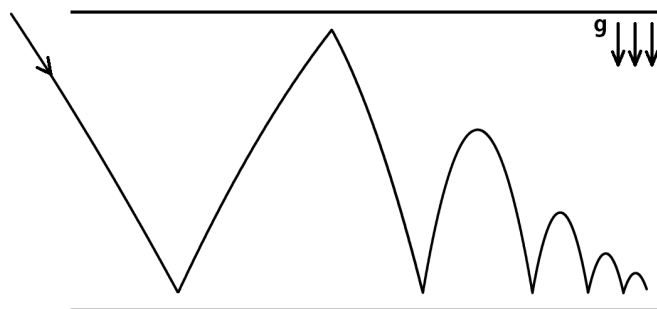


Рис. 9: Траектория движения жесткого шарика при $\gamma = 0.7$. Видно существенное изменение траектории.

Такие большие потери не присущи легким шарикам. Коэффициент восстановления для нашего шарика пинг-понг при взаимодействии с деревянной поверхностью $\gamma = 0.91$ (Если отпустить шарик с некоторой высоты, то после падения он поднимется на меньшую высоту. Тогда $\gamma = \sqrt{h/h_0}$). Но если мы бросим, к примеру, тяжелый металлический шар, то его коэффициент окажется намного меньше. Так же γ , очевидно, зависит от рода поверхности, ведь мы можем "занулить" коэффициент восстановления, бросив шар на песок.

1.3 Экспериментальный метод, проверка модели

Для проверки нашей модели мы сделали экспериментальную установку, позволяющую делать удобный запуск шарика и с помощью камеры фиксировать происходящее в системе (рис. 10).

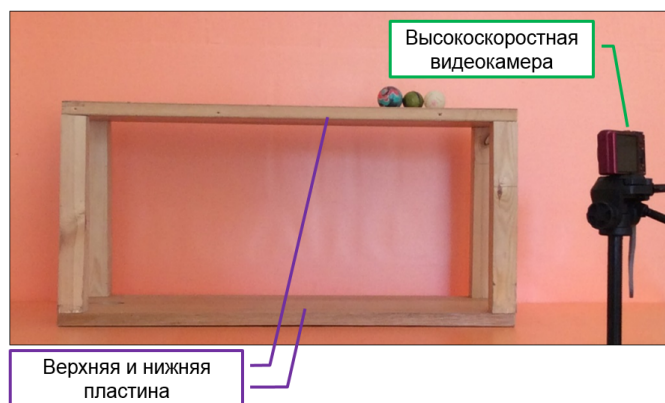


Рис. 10: Экспериментальная установка.

В экспериментах мы использовали шарик пинг-понг, параметры которого вы можете видеть на рис. 11.

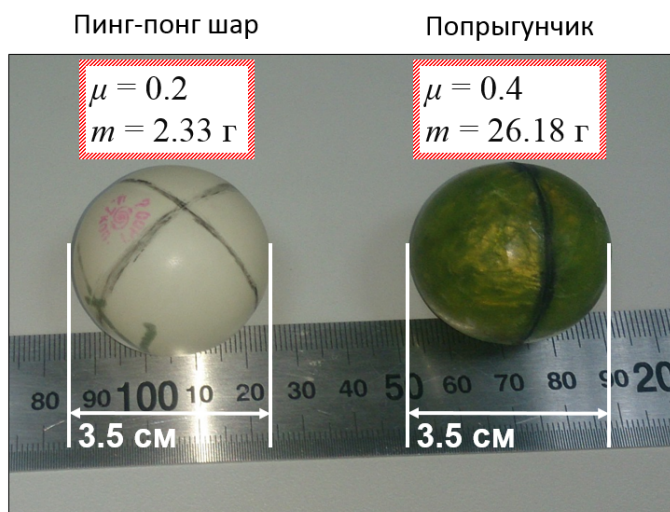


Рис. 11: Параметры шарика пинг-понг и каучукового мячика.

После проведения эксперимента мы обрабатывали полученные данные в программном обес-

печении PASCO CAPSTONE, в котором удобно работать с видеофайлами и производить трассировку движения.

Итак, мы бросили шарик пинг-понг между двумя пластинами и с помощью трассировки получили траекторию движения. PASCO CAPSTONE позволяет по трассировке получать скорость и ускорение шарика. Эти параметры использовались в программе для получения траектории движения. По окончании работы программы мы сравнили полученный результат с экспериментом (рис. 12).

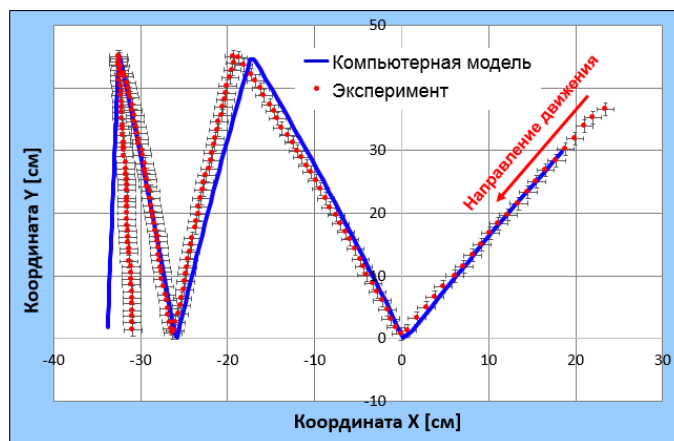


Рис. 12: Сравнение теории с экспериментом.

Погрешность мы вычисляли, как стандартное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (1.11)$$

Как мы видим, наша модель хорошо описывает

²Некоторые отклонения вызваны силой сопротивления воздуха (шарик достаточно легкий) и неровностями поверхности и шара. Также мы считали, что контакт с поверхностью точечный, но на самом деле есть небольшая площадка контакта.

движение шарика, хотя есть малые расхождения².

Мы добились обратного отскока шарика путем его начальной закрутки. Точно так же, как и в предыдущий раз, мы смоделировали данный эксперимент с помощью нашей программы, зная начальные координаты и скорости (рис. 13).

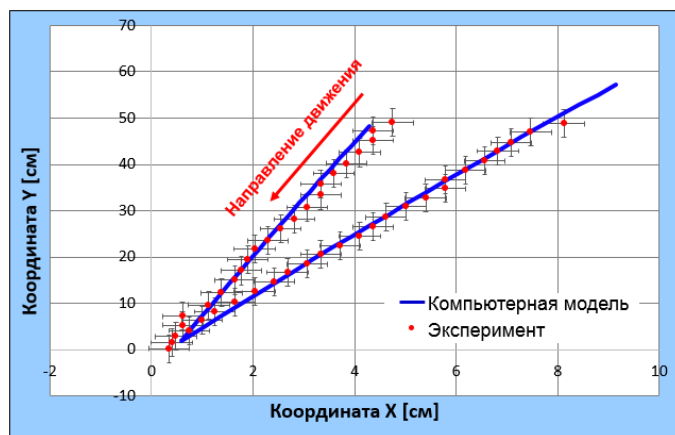


Рис. 13: Обратный отскок жесткого шарика.

И в этом случае наша модель показала отличные результаты. Таким образом, мы можем описывать движение жёсткого шарика с помощью вышеприведенного подхода.

2 КАУЧУКОВЫЙ МЯЧ

2.1 Качественное объяснение причины возвращения

Очевидно, что для описания движения резинового мяча не подойдет предыдущий подход: траектории жесткого шарика и попрыгунчика сильно различаются. Это различие, как было сказано в введении, появляется из-за разных свойств

материалов, из которых сделаны мячи. Странное поведение попрыгунчика (рис. 1) обеспечивается его упругостью и эластичностью. Гибкие молекулы каучука в покое под влиянием теплового движения, приводящего к хаотическим колебаниям отдельных звеньев цепи, находятся в искривленном состоянии (рис. 14).

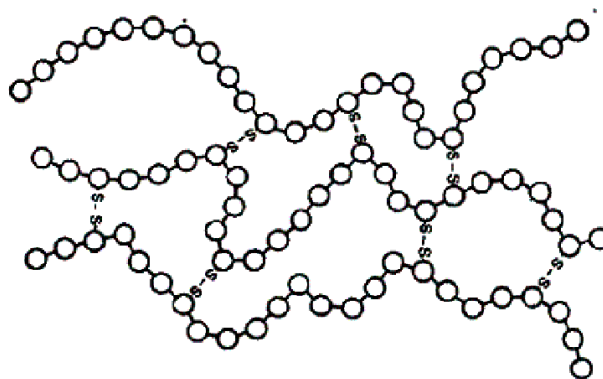


Рис. 14: Строение каучука.

При растяжении молекулы-клубки вытягиваются, распрямляются, а по снятии усилия вновь сокращаются. Этим пружинящим действием и объясняется такая эластичность и упругость резинового мячика.

Во время удара изменяется форма мяча и смещается центр масс. Динамическое описание движения, таким образом, затруднено. Но объяснить почему мяч вылетает можно на качественном уровне. В описании движения жёсткого шарика (1 глава) мы показали, что удар происходит не мгновенно, а какое-то конечное время $\tau \sim 10^{-3}$ сек. В это время центр масс попрыгунчика продолжает двигаться, но это происходит уже не за счет проскальзывания (как это было в случае жёсткого шара), а за счет деформации мяча. Это значит, что при небольших де-

формациях точка контакта не перемещается и проскальзывания нет (рис. 15).

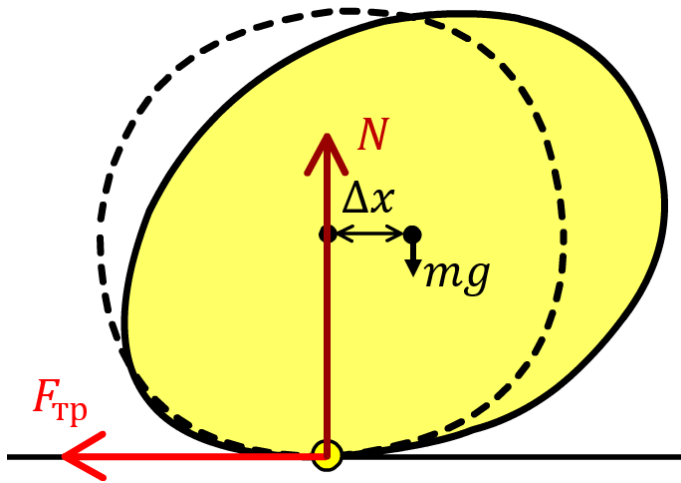


Рис. 15: Столкновение упругого мяча. Центр масс движется, но точка контакта при этом стоит на месте.

Относительно центра масс действует не только момент силы трения, но и момент силы реакции опоры (т.к мяч сдвинулся на некоторое расстояние Δx). Поэтому в сравнении с жестким шаром после удара мяч будет иметь бóльшую угловую скорость после удара.

Второй удар происходит уже с имеющейся начальной угловой скоростью (рис. 16). Как и при предыдущем ударе, точка контакта мячика не движется во время удара - она как бы "вцепляется" в поверхность пластины, но центр масс при этом продолжает движение. Т.к точка контакта не движется, можно считать, что центр масс мяча вращается относительно этой точки.

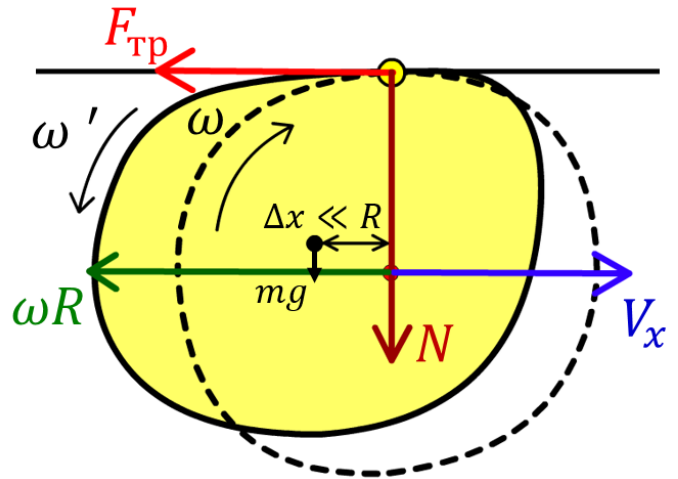


Рис. 16: Столкновение упругого мяча с верхней пластиной.

Вращение по часовой стрелке происходит со скоростью $V_l = \omega R$, а против часовой $V_r = V_x$. Тогда очевидно, что для изменения направления движения центра масс необходимо, чтобы $V_l > V_r$, или:

$$\omega R > V_x$$

Оказывается, что это достаточное условие, но не обязательное. Позже мы более подробно рассмотрим условия, при которых мячик будет возвращаться.

Из-за деформаций сила реакции опоры, а значит и сила трения, сильно возрастают. Это приводит к появлению большого момента сил против часовой стрелки (Плечо силы трения намного больше плеча силы реакции опоры. На рисунке Δx сильно преувеличен и на самом деле имеет меньший порядок длины, чем радиус). Этот момент закручивает мяч в обратную сторону, изменяя направление угловой скорости. В итоге, после удара мяч изменяет направление и поступательной, и угловой скорости.

То есть при достаточно большой начальной закрутке мячика, он должен скакать из стороны в сторону, изменяя при этом каждый раз направление угловой и поступательной скорости, что мы и наблюдаем на опыте (рис. 17).

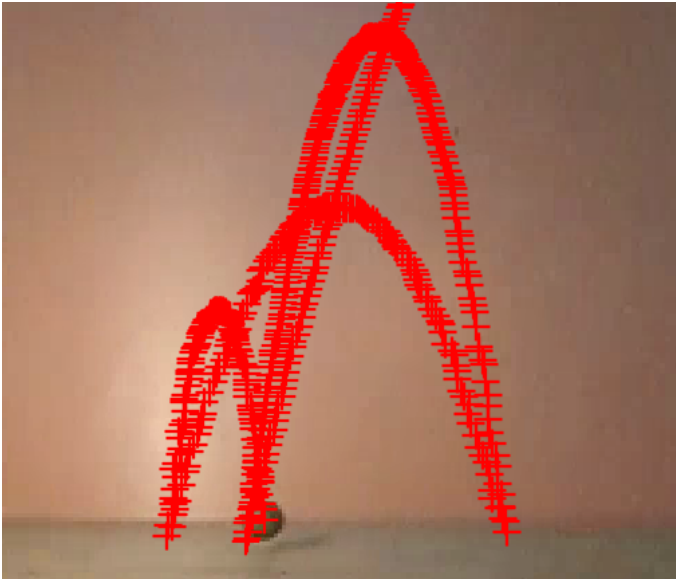


Рис. 17: Если придать мячику достаточно большую отрицательную угловую скорость, то он будет скакать из стороны в сторону, изменяя направления угловой и горизонтальной скорости.

2.2 Описание движения попрыгунчика

Так как проскальзывания между мячом и пластиной во время удара нет, то работа силы трения равна нулю. Каучук обладает эластичными и упругими свойствами, которые обеспечивают абсолютно упругий удар³.

³На самом деле потери есть, и удар не абсолютно упругий. Позже будут введены горизонтальный и вертикальный коэффициенты восстановления.

Тогда можно записать закон сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mV'^2}{2} + \frac{I\omega'^2}{2} \quad (2.1)$$

То есть сумма энергии вращения и поступательного движения остаются постоянными.

Также мы можем записать закон сохранения момента импульса относительно точки контакта (рис. 15):

$$I\omega + mV_x R = I\omega' + mV'_x R \quad (2.3)$$

Преобразуем закон сохранения энергии и момента импульса:

$$\begin{aligned} (V'_x - V_x)(V'_x + V_x) &= -\alpha R^2 (\omega' - \omega)(\omega' + \omega) \\ V'_x - V_x &= -\alpha R (\omega' - \omega) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где α - коэффициент при mR^2 .

Поделив верхнее выражение на нижнее, получаем:

$$V'_x + V_x = R(\omega' + \omega) \quad (2.5)$$

Теперь мы имеем уравнения (2.4), (2.5) и два неизвестных. Тогда можно выразить горизонтальную и угловую скорость после удара. В итоге получаем решение:

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{V_x(1 - \alpha) + 2\alpha\omega R}{1 + \alpha} \\ V'_y &= -V_y \\ \omega' &= \frac{2V_x - \omega R(1 - \alpha)}{R(1 + \alpha)} \end{aligned}$$

Ответ получился намного проще, чем в случае жёсткого шарика, где нужно было проверять

много условий. Как видно, движение мяча не зависит от коэффициента трения: мы предполагали, что мяч представляет из себя абсолютно упругую зубчатую передачу с бесконечно большим коэффициентом трения.

Угол отскока легко находится из соотношения (1.10).

Таким образом, мы описали движение резинового мяча.

2.3 Моделирование движения попрыгунчика

Как и в первой главе мы написали программу, работающую по алгоритму, изображенному на рис. 6.

Вы можете видеть типичную траекторию упругого мячика, полученную при помощи компьютерного моделирования (рис. 18)

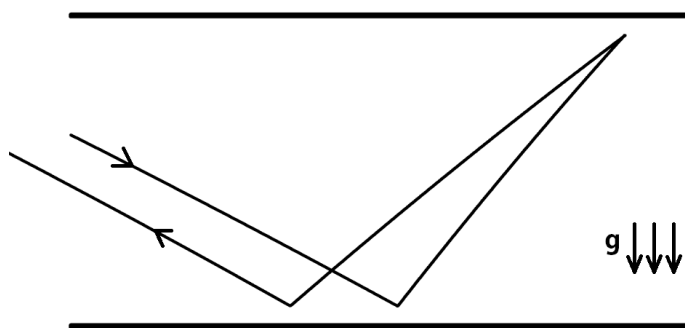


Рис. 18: Траектория движения попрыгунчика, полученная компьютерным моделированием при $V_x = 8$ м/с, $V_y = 4$ м/с.

Это очень похоже на траекторию, изображенную на рис. 1.

Мы можем выбрать любую ориентацию пластин, в том числе и вертикальную (рис. 20)

Если мы отпустим предварительно раскрученный мячик с некоторой высоты без начальной скорости, то энергия вращательного движения передет в энергию поступательного и наоборот (рис. 19).

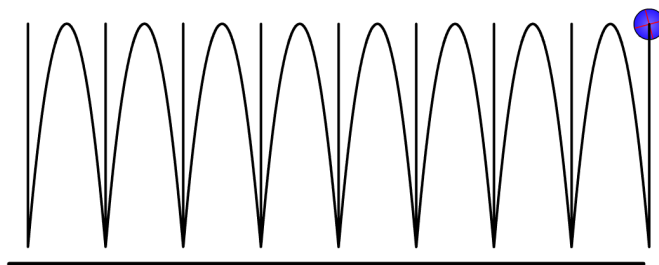


Рис. 19: Траектория движения мяча, запущенного без начальной поступательной скорости и с положительной угловой.

Очевидно, что этот процесс происходит циклически.

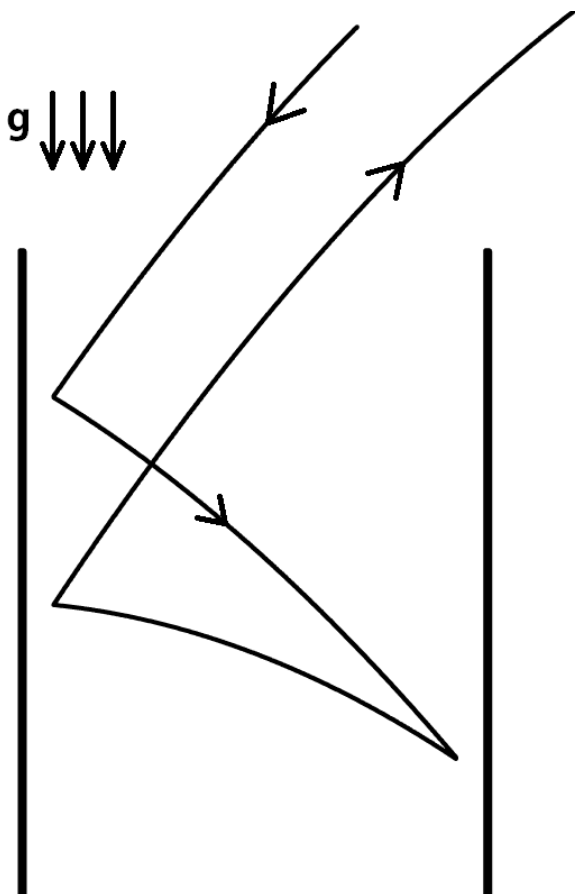


Рис. 20: Траектория движения попрыгунчика, брошенного между двумя вертикальными пластинами.

Интересен случай, когда мячик вообще не вылетает из системы (Пластины слишком длинные). В этом случае сбоку траектория будет напоминать параболоид вращения (рис. 21). Если потеря в энергии не будет, то мячик будет бесконечно прыгать между пластинами.

Можно реализовать эксперимент с наклонными пластинами: нужно спроецировать перпендикулярную и параллельную к пластине составляющую скорости попрыгунчика.

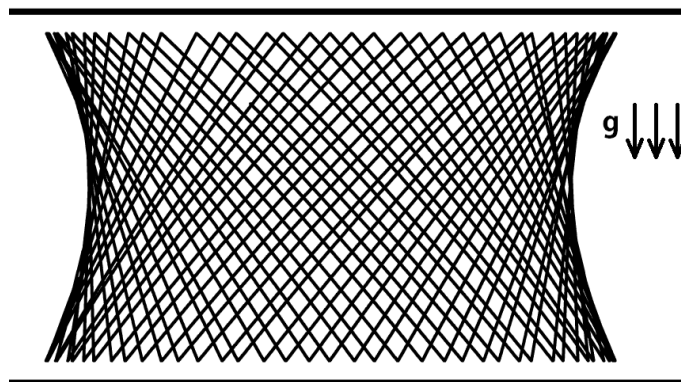


Рис. 21: Траектория движения резинового мяча, брошенного между двумя длинными пластинами.

2.4 Экспериментальная проверка модели

Пришло время экспериментально проверить применимость нашей модели к описанию движения резинового мяча. Для проверки нашей теории мы сделали экспериментальную установку, позволяющую делать удобный запуск шарика и с помощью камеры фиксировать происходящее в системе (рис. 10).

В наших экспериментах мы использовали резиновый мяч, параметры которого вы можете видеть на рис. 11.

После проведения эксперимента мы обрабатывали полученные данные в программном обеспечении PASCO CAPSTONE, в котором удобно работать с видеофайлами и производить трассировку движения.

Итак, мы бросили резиновый мяч между двумя пластинами и с помощью трассировки получили траекторию движения. PASCO CAPSTONE позволяет по трассировке получать скорость и ускорение шарика. Эти параметры ис-

пользовались в программе для получения траектории движения. По окончании работы программы мы сравнили полученный результат с экспериментом (рис. 22).

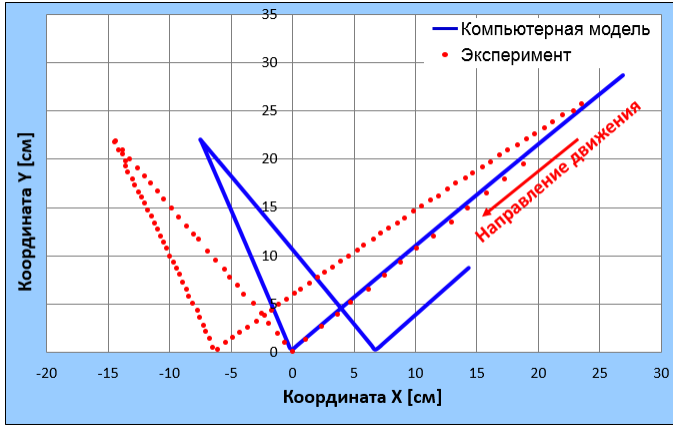


Рис. 22: Сравнение теории с экспериментом. Видны существенные различия.

Но при сравнении нашей модели с тем, что было получено в эксперименте, мы увидели существенные различия: видно, что в модели третий удар происходит за границей зоны первых двух ударов, а эксперимент показывает, что третий удар происходит в этой зоне. Получается так, что траектории как будто сдвинуты, и одна выше другой.

Когда мы описывали движение каучукового мяча, мы считали, что удар абсолютно упругий, нет проскальзывания и потерь в энергии, а контакт с поверхностью — точечный. Такая идеализированная модель дает только качественное сходство: на самом деле удар, естественно, не абсолютно упругий, есть существенные потери в энергии из-за деформаций и проскальзывания, а контакт с поверхностью — небольшая площадка.

Чтобы учесть все эти факторы нужно ввести безразмерный вертикальный и горизонтальный коэффициенты восстановления (Они не одинаковы из-за того, что при горизонтальном движении существуют ещё и потери на работу силы трения). Вертикальный коэффициент восстановления введём так же, как в случае с жёстким шаром:

$$\gamma = -\frac{V'_y}{V_y} \quad (2.6)$$

Чтобы учесть потери при горизонтальном движении мяча, в выражении (2.5) введём коэффициент восстановления β :

$$V'_x + \beta V_x = R(\omega' + \beta\omega)$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{V'_x - \omega'R}{V_x - \omega R} \quad (2.7)$$

Из-за появления этих коэффициентов итоговые выражения, естественно, изменятся:

$$V'_x = \frac{V_x(1 - \alpha\beta) + \omega R\alpha(\beta + 1)}{1 + \alpha}$$

$$V'_y = -\gamma V_y$$

$$\omega' = \frac{V_x(\beta + 1) - \omega R(\beta - \alpha)}{R(1 + \alpha)}$$

При уменьшении вертикального коэффициента восстановления верхушки траектории будут спадать по экспоненциальному закону (рис. 23, а).

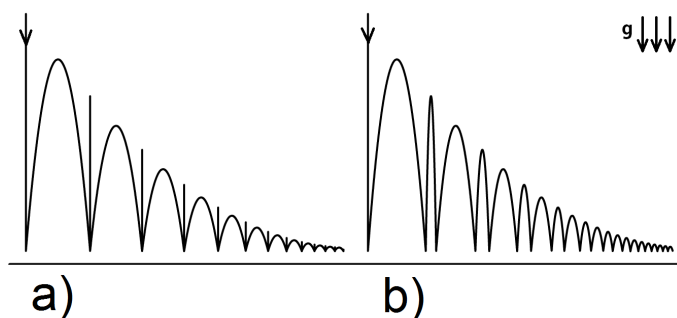


Рис. 23: Траектория движения мяча, запущенного без начальной поступательной скорости и с положительной угловой. а) $\gamma = 0.9$; $\beta = 1$ б) $\gamma = 0.9$; $\beta = 0.8$

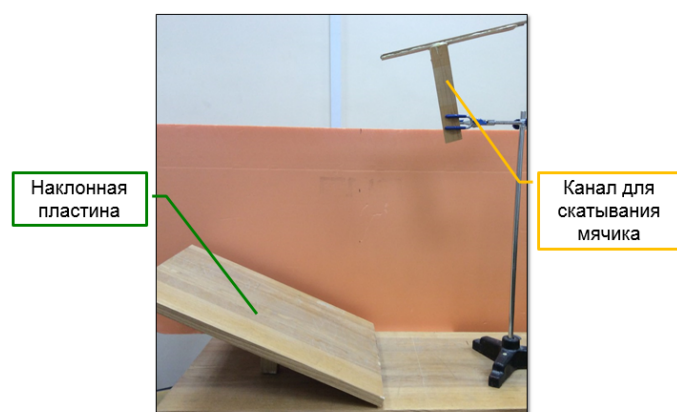


Рис. 24: Установка для измерения вертикального и горизонтального коэффициента восстановления.

Если ещё уменьшить и горизонтальный коэффициент восстановления β , то траектория будет похожа на ту, что мы наблюдаем при проведении подобного опыта (рис. 23, б).

Для того, чтобы измерить коэффициенты восстановления α и β , нами была собрана установка, изображённая на рис. 24

Для измерения вертикального коэффициента восстановления мы бросали мячик с разных высот и фиксировали скорость до и после удара.

Нами была построена зависимость вертикальной скорости после удара от вертикальной скорости до удара (рис. 25)

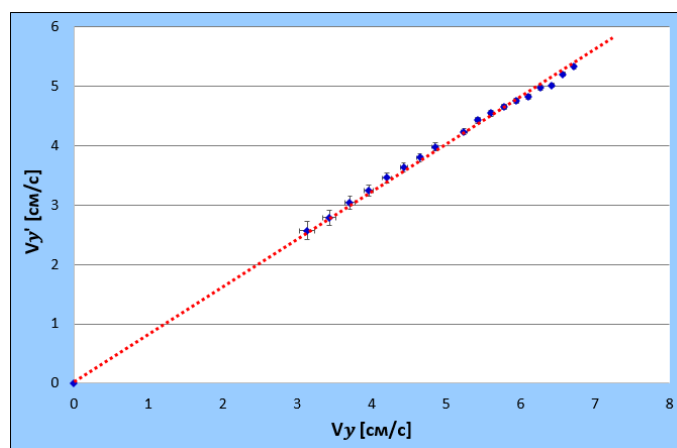


Рис. 25: Зависимость вертикальной скорости после удара от вертикальной скорости до удара. Наблюдается прямая зависимость.

К счастью, мы получили прямую зависимость. Это говорит о том, что вертикальный коэффициент восстановления не зависит от начальной скорости (В пределах наших измерений) (рис. 26) Для нашего мячика $\gamma = 0.8$

Для измерения горизонтального коэффициента восстановления мы скатывали мячик с разных высот, изменяя таким образом скорость нижней точки мяча перед ударом. После проведения серии экспериментов мы построили зависимость β от скорости точки контакта перед ударом (рис. 27).

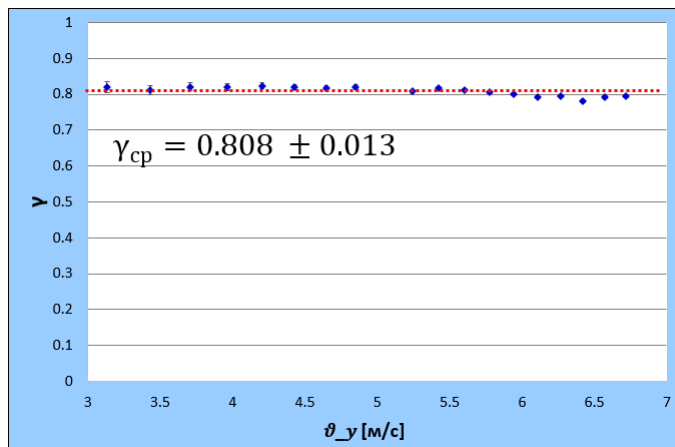


Рис. 26: Зависимость вертикального коэффициента восстановления от скорости перед ударом. $\gamma = 0.8$

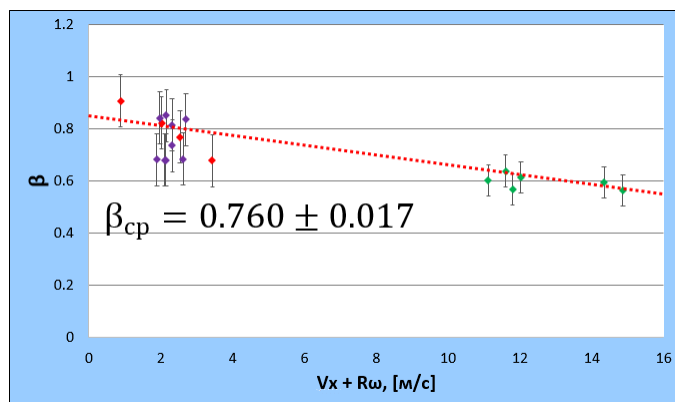


Рис. 27: Зависимость горизонтального коэффициента восстановления от скорости нижней точки перед ударом. $\beta = 0.76$

Видно, что, при увеличении скорости нижней точки, β начинает постепенно уменьшаться, что значит увеличение потерь, но мы считаем, что это изменение совсем незначительное и можно считать, что β не меняется в пределах изучаемых нами скоростей. Для нашего мяча $\beta = 0.76$; Как и следовало ожидать, горизонтальный ко-

эффициент восстановления немного меньше вертикального. Обычно выполняется соотношение $\beta \leq \gamma$.

Теперь мы повторно смоделировали траекторию мяча, используя измеренные нами коэффициенты восстановления и получили превосходное соответствие практики с компьютерной моделью (рис. 28).

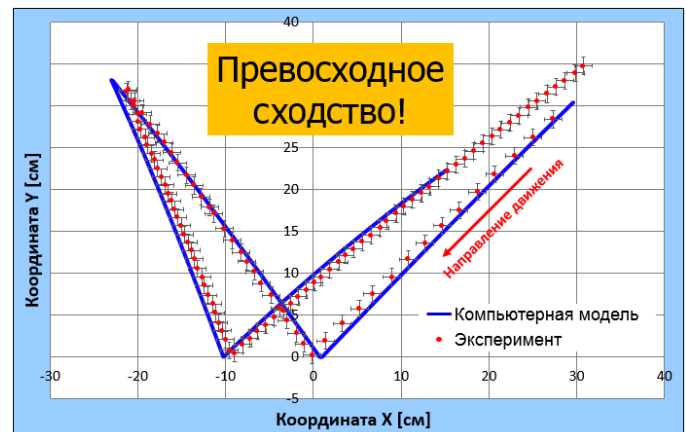


Рис. 28: Сравнение теории с экспериментом.

Мы провели несколько экспериментов с разными начальными параметрами и получили отличное сходство эксперимента с теорией (рис. 29).

Измеряя коэффициенты восстановления для конкретного мячика, с помощью такого подхода мы можем описывать движение при любых начальных параметрах.

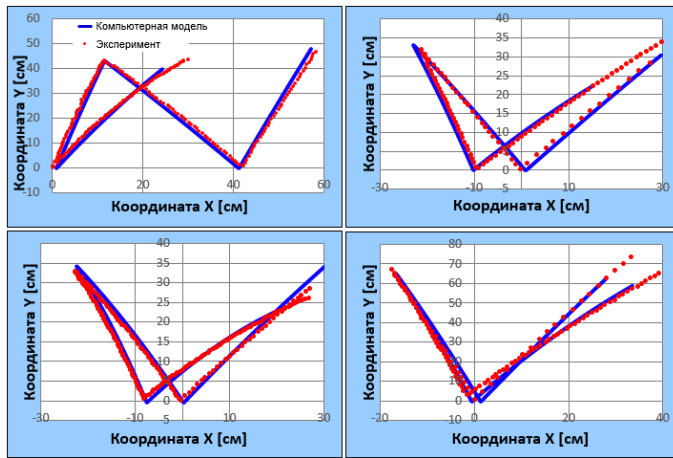


Рис. 29: Сравнение теории с экспериментом.

2.5 Условия вылета каучукового мяча

Очевидно, что для того, чтобы мяч вылетел из системы, ему должно хватить энергии для того, чтобы долететь до верхней пластины. То есть должен состояться второй удар о верхнюю пластину (иначе мяч просто будет прыгать по нижней пластине и никогда не вылетит):

$$\frac{mV_y'^2}{2} \geq mgD$$

где D - расстояние между пластинами. Т.е:

$$|V_y| \geq \frac{\sqrt{2gD}}{\gamma}$$

Это обязательное условие на вылет и мы в дальнейшем будем считать, что оно всегда выполняется.

Проблема в том, что вылет не обязан происходить после третьего удара. Вполне возможен вылет после 4 удара.

Полезно заметить, что изменение модуля скорости не влияет на шансы вылета мяча (рис. 30.1). Как и упоминалось, главное, чтобы мячику хватило энергии долететь до верхней пластины (эти случаи нас и интересуют).

Так же как и величина скорости, направление не влияет на шансы мячика вылететь из системы. Траектория при изменении направления просто масштабируется, растягиваясь или удлиняясь. (рис. 30.2). В данном случае траектория растягивается, но видно, что это не влияет на вылет мяча.

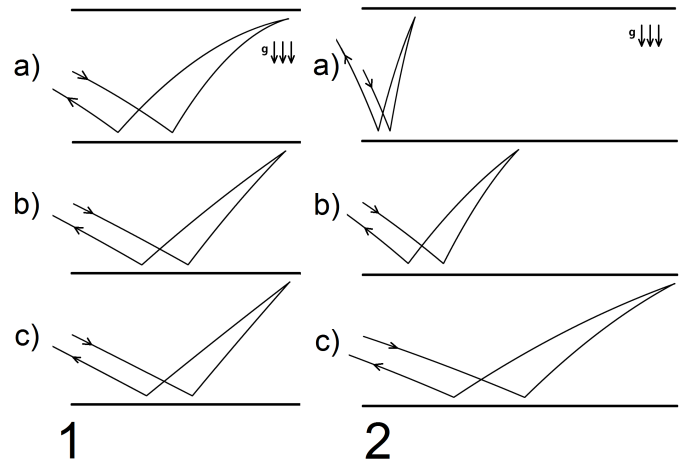


Рис. 30:

1: Запуск мячика с разной величиной скорости. а) $V_x = 3$ м/с $V_y = 1.5$ м/с; б) $V_x = 6$ м/с $V_y = 3$ м/с; в) $V_x = 12$ м/с $V_y = 6$ м/с

2: Запуск мячика с разным направлением скорости. а) $V_x = 1$ м/с $V_y = 2$ м/с; б) $V_x = 3$ м/с $V_y = 2$ м/с; в) $V_x = 6$ м/с $V_y = 2$ м/с

Параметры, определяющие вылет мяча, есть начальное расстояние между мячом и нижней пластиной, вертикальный и горизонтальный коэффициенты восстановления. При увеличении расстояния, очевидно, шансы вылететь будут

уменьшаться (рис. 31). Увеличение горизонтального коэффициента увеличит шансы на вылет (рис. 32). Интересней ситуация с вертикальным коэффициентом.

Зная расстояние до нижней пластины, можно с помощью компьютерной симуляции найти минимальный горизонтальный коэффициент восстановления, необходимый для вылета из системы. Если циклом перебрать все расстояния до нижней пластины и найти для каждого такой β , мы получим график, изображённый на рис. 33).

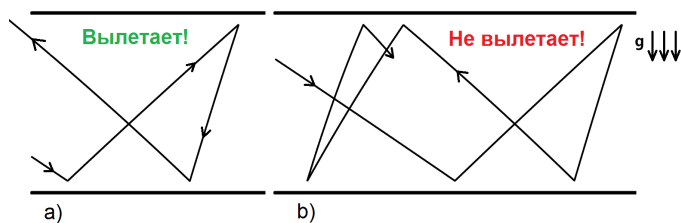


Рис. 31: Влияние увеличения расстояния до нижней пластины на шансы вылета мяча.

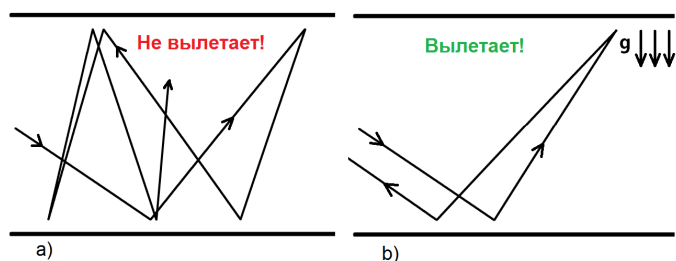


Рис. 32: Влияние увеличения β на шансы вылета мяча.

Если горизонтальный коэффициент ниже необходимого для вылета при заданном расстоянии до нижней пластины, то мяч не вылетает назад. Область, в которой мяч не вылетает, помечена красным цветом. Если горизонтальный

коэффициент выше необходимого для вылета, то мяч вылетает назад. Эта область помечена зеленым цветом. На основании такой диаграммы можно предсказать, вылетит ли мяч из системы.

Диаграмма возвращения построена для $\gamma = 1$. Мы построили новую диаграмму, учитывая то, что на самом деле вертикальный коэффициент восстановления меньше единицы и получили интересный результат: оказывается, что минимальный β , необходимый для вылета, меньше в случае, когда γ уменьшается. То есть график опустится вниз (рис. 34). Это происходит из-за того, что после нескольких ударов мяч меняет направление и горизонтальной, и угловой скорости. Если ударов было более 4-х, то мяч не возвращается и происходит примерно то, что изображено на рис. 21;

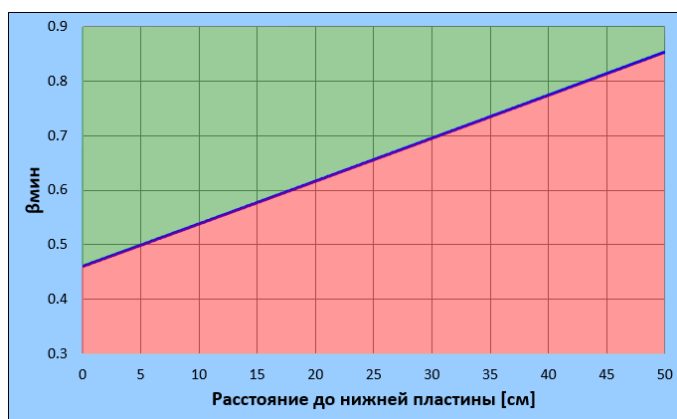


Рис. 33: График зависимости минимального горизонтального коэффициента восстановления, необходимого для вылета из системы, от расстояния до нижней пластины.

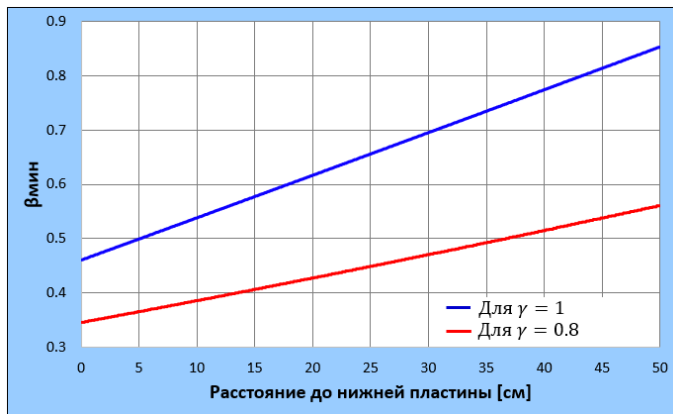


Рис. 34: График зависимости минимального коэффициента восстановления, необходимого для вылета из системы, от расстояния до нижней пластины с учетом и без учета вертикального коэффициента восстановления.

Когда мы уменьшаем вертикальный коэффициент восстановления, увеличивается время полета от верхней до нижней пластины. Из-за этого мяч успевает вылететь из системы, не столкнувшись четвертый раз о верхнюю пластину (рис. 35).

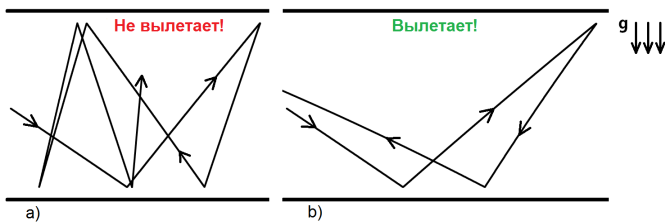


Рис. 35: Влияние уменьшения вертикального коэффициента восстановления на шансы вылета мяча.

То есть в идеальном случае, когда мяч имеет вертикальный коэффициент восстановления равный единице шансы на вылет меньше, чем в случае, когда есть некоторые потери.

Мы подобрали высоту, при которой коэффициент восстановления мяча был практически равен минимальному необходимому для вылета и, как вы видите, мяч неуверенно, но вылетает назад (рис. 36).

Таким образом, мы можем предсказать возможность вылета мяча при любых начальных параметрах, зная начальное расстояние до нижней пластины, γ и β , с помощью диаграммы, построенной компьютерной моделью.

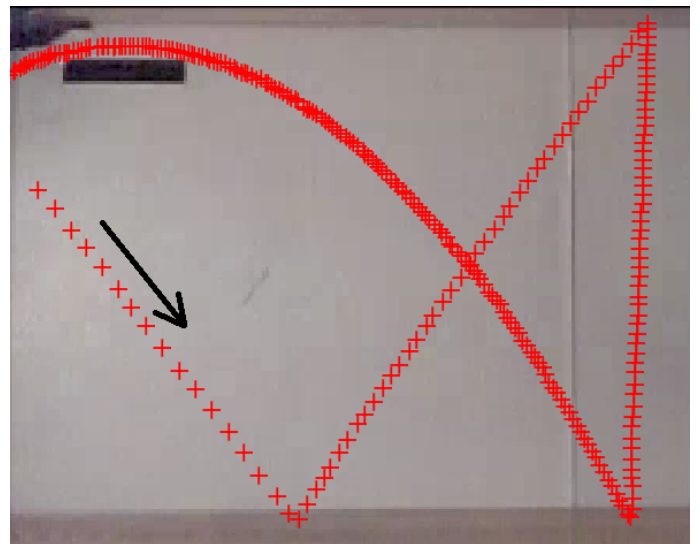


Рис. 36: Траектория движения мячика, брошенного между двумя пластинами с подобранным расстоянием до нижней пластины, при котором мяч имеет минимальный β , необходимый для вылета.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первом разделе мы описали движение жесткого шарика с помощью законов Ньютона, сохранения импульса и момента импульса. Основываясь на полученном решении, мы написали компьютерную программу, способную моделировать

траекторию шара, имея необходимые начальные параметры. Как мы убедились на опыте, наша модель хорошо описывает движение. Таким образом, мы научились предсказывать поведение жесткого шара при любых начальных параметрах системы.

Каучуковый мяч ведет себя по-другому из-за того, что свойства материалов жесткого шарика и попрыгунчика различны. Центр масс жесткого шара во время удара продолжает двигаться, но сам шар практически не деформируется. Поэтому во время удара происходит проскальзывание. Центр масс попрыгунчика также продолжает двигаться, но происходит это уже не за счет проскальзывания, а за счет деформации мяча. Исходя из этого, мы считали точку контакта неподвижной.

Динамическое описание каучукового мяча было затруднено, и на помощь пришёл энергетический подход, который оказался очень эффективным и простым. Как в случае с жестким шаром, мы написали компьютерную модель, описывающую движение попрыгунчика. Хотя компьютерная траектория была похожа на настоящую, эксперимент показал существенные раз-

личия модели и практики: модель оказалась слишком идеализированной. Для учета потерь при небольшом проскальзывании, деформациях и других факторов, нами были введены коэффициенты восстановления, которые в пределах изучаемых нами скоростей остаются постоянными. Эти коэффициенты зависят от мячика и поверхности, и, измерив однажды, мы можем многократно использовать их в моделировании. Проверка модели показала, что теория и практика отлично согласуются. Это позволяет нам предсказывать поведение упругого мячика при любых начальных параметрах системы, зная коэффициенты восстановления для данного мяча и поверхности.

Теоритическая модель позволила нам предсказывать возможность вылета каучукового мяча. Нами было замечено, что она(возможность) не зависит от величины и направления начальной скорости. Необходимо только чтобы после первого удара мяч долетел до верхней пластины. Факторы, определяющие вылет, есть γ , β и расстояние от мяча до нижней пластины. Если мы знаем эти параметры, то можем точно сказать, вылетит мяч или нет.

Список литературы

- [1] Ершов А.П. - Курс лекций по физике для школьников.
- [2] Д.А.Медведев, А.Л.Куперштох, Э.Р.Прууэл, Н.П.Сатонкина, Д.И.Карпов - Моделирование физических процессов и явлений на пк.
- [3] Garwin 1969 - Kinematics of an ultraelastic rough ball.
- [4] Hefner 2004 - The kinematics of a superball bouncing between two vertical surfaces.
- [5] Бутиков Е.И., А.А.Быков, А. С.Кондратьев - Физика в примерах и задачах